Prova 2 – Álgebra Linear – 2025/1

Instruções

1. **Justifique** todas as respostas.
2. Sobre a carteira, apenas lápis, borracha, caneta e **documento** com foto.
3. **Nenhum eletrônico** (celular, relógio, calculadora, ...) é permitido durante a prova.
4. A correção leva em conta a organização, clareza e corretude das respostas.
5. **Pode** responder usando **lápis** e em qualquer ordem.

Questões

1. (**10**) A transformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(x+y,y,1)$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ é uma transformação linear?

👉**Não.** $T(\vec{0})=T(0,0)=(0,0,1)\neq\vec{0}.$∎

2. (**20**) Mostre que $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $T(x,y)=x$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}$ é uma transformação linear, determine seu núcleo, a sua imagem e a matriz da transformação associada à base canônica do domínio e no contra-domínio.

👉$T(\alpha(x,y)+\beta(u,v))=\alpha x+\beta u=\alpha\,T(x,y)+\beta\,T(u,v)$, logo é T.L.
$T(x,y)=0$ se e só se $x=0$, portanto $N(T)=\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}$.
Dado $a\in\mathbb{R}$, $T(a,y)=a$, logo é sobrejetora, a imagem é todo $\mathbb{R}$.
$T(1,0)=1$ e $T(0,1)=0$ portanto $[T]=[1\ \ 0]$ (matriz 1x2) ∎

3. (**30**) Determine uma base para o subespaço $\mathcal{W}$ do $\mathbb{R}^4$ dado abaixo e complete-a para uma base de $\mathbb{R}^4$ onde $\mathcal{W}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x+y-t=0 \text{ e } x-y-z=0\}$.

👉Os vetores de $\mathcal{W}$ satisfazem

$$\begin{cases} x+y-t=0\\ x-y-z=0\end{cases}$$

cuja soluções são $(x,y,z,t)=(t-y,y,t-2y,t)=y(-1,1,-2,0)+t(1,0,1,1)$ Portanto, $\mathcal{W}$ é gerado por $\{(-1,1,-2,0),(1,0,1,1)\}$, que é l.i. porque um vetor não é múltiplo do outro (se o segundo fosse múltiplo do primeiro a ultima coordenada deveria ser zero), portanto base. Para completar essa base para uma base de $\mathbb{R}^4$, adicionamos dois vetores linearmente independentes dos anteriores. Escalonando $\begin{bmatrix}-1&1&-2&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}$ obtemos $\begin{bmatrix}-1&1&-2&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$, logo adicionamos os vetores $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$ às linhas da matriz e obtemos 4 vetores l.i. Como estamos num espaço de dimensão 4 esses vetores são base do espaço. Verificando que s vetores originais são l.i.: a matriz:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&-2&0\\1&0&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

que, escalonada fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

as linhas da matriz escalonada são linearmente independentes, portanto, as A também são.∎

4. (**30**) Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem da transformação linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida para todo $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ por $T(p(x)) = (p(1), p'(1), p(0))$, onde $p'(1)$ é a derivada de p no ponto $x = 1$.

👉Tome $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, com a base ordenada canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$. Temos $T(p(x)) = (a + b + c + d,\ b + 2c + 3d,\ a)$. O núcleo e o conjunto solução de $\begin{cases} a = 0 \\ b + c + d = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \end{cases}$, ou seja, $a = 0,\ b = d,\ c = -2d,\ d = d$. Então o núcleo é o subespaço de dimensão 1 gerado por: $\{(0, 1, -2, 1)_c\}$ ou seja $\{x - 2x^2 + x^3\}$, que é l.i., portanto base.

A dimensão da imagem é $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) - \dim N(T) = 4 - 1 = 3$.

A imagem é gerada pelas linhas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (correspondentes às imagens dos polinômios da base)

que escalonada fica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ portanto uma base é $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$.∎

5. (**40**) Seja $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ uma transformação linear entre espaços de dimensão n e m, respectivamente. Seja $r = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

(1) Prove que existe uma base ordenada $C = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ de $\mathcal{V}$ tal que os r primeiros vetores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ formam uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

(2) Mostre que é possível escolher $\vec{u}_i \in \mathcal{U}$, para $i = 1, \ldots, n$ tais que:

$(2.a)$ para $i = 1, \ldots, r$ vale $T(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$;

$(2.b)$ para $i = r + 1, \ldots, n$ vale que $\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}$ é uma base do núcleo de T;

$(2.c)$ $B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ é uma base de $\mathcal{U}$.

(3) Conclua que a matriz $[T]_{BC} = [\tau_{ij}]$ da transformação é uma matriz tal que $\tau_{11} = \tau_{22} = \cdots = \tau_{rr} = 1$ e as outras entradas são 0.

👉Como a dimensão da imagem é r podemos tomar uma base ordenada $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$; tais vetores são l.i. em $\mathcal{V}$ logo se $r < m$ podemos estender essa base para uma base ordenada $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathcal{V}$ pelo *Teorema do Completamento*. Isso responde (1)∎

👉Como os r primeiros vetores dessa base estão na imagem de T podemos tomar a pré-imagem $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ deles. Se $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ for l.d. então existe i tal que $\vec{u}_i = \alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\vec{u}_{i-1} + \alpha_{i+1}\vec{u}_{i+1} + \cdots + \alpha_r\vec{u}_r$, logo $\vec{T}(u_i) = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \alpha_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \cdots + \alpha_r\vec{v}_r$ pois $\vec{v}_i = T(\vec{u}_i)$, um absurdo. Portanto é l.i. Isso responde (2a) e um pouco mais.∎

👉A dimensão de $N(T)$ é $\dim U - \dim(\text{Im}(T)) = n - r$, portanto , tem uma base $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-r}$. Façamos $\vec{u}_{r+1} = \vec{w}_1, \vec{u}_{r+2} = \vec{w}_2, \ldots, \vec{u}_n = \vec{w}_{n-r}$. Isso responde (2b). ∎

👉Para provar que B é base, basta provar que é l.i. Se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i = \vec{0}$. Aplicando T temos $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{\mathbf{r}} \alpha_i\vec{v}_i = \vec{0}$, logo $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$ pois os $\vec{v}_i$'s são l.i. Assim, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i = \vec{0}$, que é um combinação nula dos vetores da base do núcleo, portanto $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Isso responde (2c)∎

👉 $[T]_{BC} = \left[[T(\vec{u}_1)]_C \ldots [T(\vec{u}_r)]_C \quad [T(\vec{u}_{r+1})]_C \ldots [T(\vec{u}_n)]_C\right] = \left[[\vec{v}_1]_C \ldots [\vec{v}_r]_C \quad [\vec{0}]_C \ldots [\vec{0}]_C\right]$ e $[\vec{v}_i]_C$ tem 1 na coordenada i e 0 nas demais, pois faz parte da base. ∎

6. (**20**) Prove que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não inversível então os vetores-coluna de A são linearmente dependentes.

👉Se A não é inversível então a TL dada por $T(X) = AX$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$, não é injetora (pois se fosse, também seria sobre, portanto bijetora, portanto, inversível), logo existe $X \neq \vec{0}$ com $AX = \vec{0}$. O produto AX é uma combinação linear nula das colunas de A com coeficientes não nulos. Portanto,pela definição, as colunas são l.d.∎